Teoria przestrzeni Hilberta
Lista 4 (operatory skończonego rzędu, obliczanie widma)

Zad 1. Niech $K \in L(H)$ będzie operatorem skończonego rzędu $Kx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, \psi_j \rangle \varphi_j$ oraz niech $\dim(H) = \infty$. Rozważmy macierz $\widetilde{K} = [k_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, gdzie $k_{ij} := \langle \varphi_j, \psi_i \rangle$, $i, j = 1, ..n$. Wykazać, że

a) $0 \in \sigma(K)$ oraz dla $\lambda \neq 0$ zachodzi równoważność

$$\lambda \in \sigma(K) \iff \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } \widetilde{K} = [k_{ij}]_{i,j=1}^{n},$$

tj. $\sigma(K) = \sigma(\widetilde{K}) \cup \{0\}$,

b) x jest wektorem własnym operatora K wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j$, gdzie $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ jest wektorem własnym macierzy $\widetilde{K}$. Dokładniej

$$\ker(\lambda - K) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \in H : \widetilde{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

c) rezolwenta $R_K : \mathbb{C} \setminus \sigma(K) \to L(H)$ jest operatorem postaci $R_K(\lambda) = \frac{1}{\lambda} I - K(\lambda)$, gdzie $K(\lambda)$ jest operatorem skończonego rzędu danym wzorem

$$K(\lambda)x = \frac{1}{\det(\lambda I - \widetilde{K})} \det \begin{pmatrix} \left[\lambda I - \widetilde{K}\right] & \begin{bmatrix} \langle x, \psi_1 \rangle \\ \langle x, \psi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, \psi_2 \rangle \end{bmatrix} \\ [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n] & 0 \end{pmatrix}$$

Zad 2. Obliczyć widmo i wyznaczyć rezolwentę dla następujących operatorów

a) $Kx = (2x(1) + x(2), -x(1), \frac{1}{2}x(1), -\frac{1}{3}x(1), \frac{1}{4}x(1), ...)$, gdzie $K : \ell^2 \to \ell^2$,

b) $(Kf)(t) = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(s) \cos s \, ds\right] \frac{4}{\pi} \cos t + \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(s) s \, ds\right] \sin t$, gdzie $K \in L\big(L^2[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big)$.

Zad 3. Dla równania całkowego

a) $f(t) - \lambda \int_0^{2\pi} f(s) \sin(s + t) \, ds = g(t)$ w przestrzeni $H = L^2[0, \pi]$,

b) $f(t) - \lambda \int_0^1 e^{t+s} f(s) ds = g(t)$ w przestrzeni $H = L^2[0, 1]$,

wyznaczyć wartości parametru λ, dla którycz dla każdego $g \in H$ równanie ma rozwiązanie w H. Znaleźć te rozwiązania,

Zad 4. Niech $P \in L(H)$. Pokazać, że $P^2 = P$ wtedy i tylko wtedy, gdy P jest rzutem.

Zad 5. Niech $P = P^2 \in L(H)$. Wykazać, równoważność następujących warunków

i) P jest rzutem ortogonalnym,

ii) $\|P\| = 1$,

iii) $P = P^*$.

Zad 6. Pokazać, że rzut może mieć dowolnie dużą normę.

Zad 7. Obliczyć widmo i wyznaczyć rezolwentę rzutu.